**Элементы вариационного исчисления**

До сих пор рассматривались задачи оптимизации, *приводящие* к математическим моделям с *целевыми функциями одной или нескольких переменных*. Но далеко не всегда качество принятых решений можно охарактеризовать с помощью целевой функции конечного числа переменных, т.к. это решение во многих случаях состоит в выборе не числа или вектора значений управляемых переменных, а *функции*, определяющей, например, режим некоторого процесса.

Так, если с целью улучшения свойств материала необходимо провести его термическую обработку, то возникает *задача об определении* такой *зависимости температуры нагревания* "" от времени "", т.е. *функции* "*x*(*t*)", которая обеспечивает *оптимальный результат* (например, максимальное значение показателя прочности материала).

В задачах оптимизации, к рассмотрению которых мы переходим, *допустимое множество X состоит* не из точек конечномерного пространства *Rn*, а *из функций*, т.е. *элементов некоторого бесконечномерного функционального пространства*. А числовой критерий оптимизации *Y*(*x*) в таких задачах, зависящий от выбранной функции *x*(*t*)∈*X*, называется *целевым функционалом*.

Т.о., в данном разделе рассматриваются задачи оптимизации, приводящие к математическим моделям вида:

*J*(*x*) → min(max) при *x*∈*X*,

где *J*(*x*) – целевой функционал, а *X* – заданное множество функций.

В дальнейшем, если не оговорено особо, будем считать, что рассматриваем пространство вещественных скалярных функций *х* на интервале [*t*0,*t*1] *x*:[*t*0,*t*1] → *R*.

Обозначим:

 – пространство непрерывных функций на [*t*0,*t*1] с нормой .

 – пространство *r*-раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке [*t*0, *t*1] с нормой .

Выведем необходимые условия экстремумов для некоторых классов задач, традиционно рассматриваемых в классическом вариационном исчислении.

**Задача Больца (или основная задача вариационного исчисления)**

*Задачей Больца* называется следующая экстремальная задача без ограничений в пространстве непрерывно дифференцируемых функций :

 (\*)

где *B*(*x*(⋅)) – "*функционал*" Больца;

 – функция трех переменных ("*интегрант*");

 – функция двух переменных ("*терминант*").

Отрезок [*t*0,*t*1] предполагается фиксированным и конечным .

**Определение.** Функция  доставляет локальный минимум (максимум) задачи (\*), если существует *δ*>0, такое, что для любой функции , для которой выполняется неравенство:

 (локальный min) или

 (локальный max).

**Определение.** Экстремальные точки (функции) в вариационном исчислении называются *экстремалями*.

Введем обозначения:.

**Теорема** (необходимые условия экстремума).

Пусть функция  доставляет *локальный экстремум* в задаче Больца (\*).

*Пусть интегрант* *F* *непрерывен* вместе со своими *частными производными* по *x* и *ẋ*, в некоторой окрестности множества , а терминант *f* – непрерывно дифференцируем в окрестности точки . Тогда

, где 

и справедливы следующие соотношения:

1)  – *уравнение Эйлера*.

2)  – *условия трансверсальности*, где 

**Пример.**



*Решение*

Необходимые условия:

Уравнение Эйлера: ;

Условие трансверсальности: ;

Общее решение уравнения Эйлера: ;

Ищем *c*1 и *c*2 : ;

Итак,  – единственная допустимая экстремаль.

Поскольку теорема определяет необходимые, но не достаточные условия существования экстремума, то надо убедиться, что найденная экстремаль доставляет экстремум. Проверять это будем с помощью проверки выполнения неравенства в определении локальных минимумов (максимумов) в задаче(\*).

Покажем, что найденная экстремаль доставляет абсолютный минимум в задаче.

Действительно, если , то



Интегрируя по частям и учитывая, что , получим

*Ответ*: .

**Простейшая задача классического вариационного исчисления**

Простейшей задачей классического вариационного исчисления называется следующая задача в :

 (*функционал без терминанта*)

 – краевые условия на концах.

Функции , удовлетворяющие краевым условиям, называются допустимыми.

**Теорема** (о необходимых условиях экстремума).

Пусть  доставляет локальный экстремум в простейшей задаче классического вариационного исчисления, а интегрант *F* непрерывен вместе со своими частными производными по *x* и *ẋ* в некоторой окрестности множества . Тогда 

и выполнено уравнение Эйлера 

**Замечания.**

1. Набор условий для нахождения допустимой экстремали является полным. Уравнение Эйлера – дифференциальное уравнение второго порядка. Его *общее решение* содержит *две неизвестные константы*. Для определения этих констант имеется *два уравнения – условие на концах*.
2. Теорема сформирована для одномерного случая. Если , то  – функция (2*n*+1)-переменных и необходимые условия в простейшей векторной задаче состоит из системы *n*-уравнений Эйлера и 2*n*-условий на концах.

*Частные случаи уравнения Эйлера*:

Если интегрант *F* = *F*(*t*,*x*,*ẋ*) не зависит явно от одной из переменных, то уравнение Эйлера сводится к более простым уравнениям:

* Если интегрант *F*= *F*(*t*,*x*) – не зависит явно от *ẋ*, то

;

* Если интегрант *F = F*(*t*,*ẋ*) – не зависит явно от *x*, то имеет место

 (*интеграл импульса*);

* Если интегрант *F*=*F* (*t*,*ẋ*) – не зависит явно от *t*, то имеет место

 (*интеграл энергии*).

*Для доказательства последнего соотношения рассмотрим*:



**Пример 1.**



Интеграл импульса, не зависит явно от х

*Решение*

Уравнение Эйлера ;

Из условий на концах:  ⇒  – единственная допустимая экстремаль.

Покажем, что она доставляет глобальный минимум в задаче.

Пусть  – допустимая в задаче функция, и



В вычислениях использовались следующие из краевых условий соотношения.

 – допустимая ⇒ .

**Пример 2.**



*Решение*

Уравнение Эйлера (в общем виде): 

Общее решение: ;

Из условий на концах: ;

⇒ Единственная допустимая экстремаль .

Покажем, что  не доставляет экстремума.

Рассмотрим последовательность функций:



Очевидно, что *xn*(*t*) – допустимая функция и  на , но при этом:

2cos2A = 1 + cos2A

2sin2A = 1 - cos2A









⇒ уравнение Эйлера – необходимое, но не достаточное условие экстремума.

**Изопериметрические задачи (ИЗ)**

Изопериметрической задачей (с закрепленными концами) в классическом вариационном исчислении называется следующая задача в пространстве :

;

 – *изопериметрические ограничения*

*типа-равенства*;

 – *закрепленные концы* (*краевые условия*).

Функции  называются *интегрантами*.

Функции , удовлетворяющие изопериметрическим ограничениям и условиям на концах, называются *допустимыми*.

**Теорема** (необходимые условия экстремума).

Пусть функция  доставляет локальный экстремум в изопериметрической задаче. При этом, пусть функции  непрерывны в некоторой окрестности множества  (*условия гладкости*).

Тогда найдутся множители Лагранжа , не все равные нулю и такие, что для "лагранжиана" , справедливо ,

и выполнено уравнение Эйлера .

**Пример.**



 – изопериметрическое условие.

 – краевые условия (закрепленные концы).

*Решение*:

Лагранжиан:  

Необходимое условие – условие Эйлера: .

Если *λ*0 = 0, то *λ*1 = 0 ⇒ все множители Лагранжа – нули. В этом случае допустимых экстремалей нет.

Положим ⇒ общее решение: .

Неизвестные константы *с*1­, *с*2, *с*3 находятся из условий на концах и изопериметрических условий:

*x*(0)=0 ⇒ *c*3 =0

*x*(1)=1 ⇒ *c*1 +*c*2 =1



В задаче имеется единственная допустимая экстремаль .

Докажем с помощью непосредственной проверки, что функция  доставляет абсолютный минимум в задаче.

Возьмем функцию , такую, что:  – допустимая.

Для этого надо взять функцию *h*(⋅), для которой *h*(0)=*h*(1)=0 и .

Тогда для функционала  имеем

.

Интегрируя по частям с учетом условий на *h*(⋅), получим

, *ч.т.д.*

**Задачи со старшими производными**

**Уравнение Эйлера-Пуассона**

Задачей со старшими производными (с закрепленными концами) в классическом вариационном исчислении называется следующая задача в пространстве :



 – краевые условия.

Здесь *интегрант*  – функция (*n* + 2) переменных.

Функции, *удовлетворяющие краевым условиям*, называются *допустимыми*.

Локальный минимум задачи определяется для допустимых функций по норме .

**Теорема.**

Пусть функция *x̂*(⋅) доставляет локальный минимум в задаче со старшими производными. Пусть интегрант *F* удовлетворяет условию гладкости:

.

Тогда на экстремали *x̂*(⋅) выполняется уравнение Эйлера-Пуассона:



**Пример.**



*Решение*

Интегрант: . Необходимое условие –уравнение Эйлера-Пуассона:

.

Общее решение:;

Неизвестные константы определяем из краевых условий:



⇒ имеется единственная допустимая экстремаль .

Покажем, что она доставляет абсолютный минимум в задаче.

Действительно, если , то .

Рассмотрим первое слагаемое

.



Итак,

, *ч.т.д.*